

受験番号

令和6年度大阪府公立学校教員採用選考テスト

高等学校 数学 解答用紙 (4枚のうち1)

(解答及び解答に至る過程はすべて、解答用紙に記入すること。)

3

得点

(1)

$$Z_1 = -1 + \sqrt{3}i, Z_2 = 1 + i \text{ とおく}$$

$$|Z_1| = 2 \text{ より } Z_1 = 2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2 \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right)$$

$$|Z_2| = \sqrt{2} \text{ より } Z_2 = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \left\{ \cos \left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{4} \right) \right\}$$

$$= \sqrt{2} \left(\cos \frac{5}{12}\pi + i \sin \frac{5}{12}\pi \right)$$

$$\text{よって, } \left(\frac{Z_1}{Z_2} \right)^9 = (\sqrt{2})^9 \left(\cos \frac{5}{12}\pi \times 9 + i \sin \frac{5}{12}\pi \times 9 \right)$$

$$= 16\sqrt{2} \left(\cos \frac{15}{4}\pi + i \sin \frac{15}{4}\pi \right)$$

$$= 16\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)$$

$$= 16 - 16i$$

高等学校 数学 解答用紙 (4枚のうち2)

((2) (イ)は、解答及び解答に至る過程をすべて、解答用紙に記入すること。(2) (ア)は答えのみでよい。)

3

(2) (ア)

$$y = -\frac{1}{e}(x-1) + e$$

(2) (イ)

Aにおける法線の方程式は、 $y = -\frac{1}{e}(x-1) + e$

$$\therefore ye = -x + 1 + e^2 \dots \textcircled{1}$$

同様に、Pにおける法線の方程式は、 $y = -\frac{1}{e^t}(x-t) + e^t$

$$\therefore ye^t = -x + t + e^{2t} \dots \textcircled{2}$$

これらを連立させて、②-①より $y(e^t - e) = (t-1) + (e^t - e)(e^t + e)$

$$\therefore y = \frac{t-1}{e^t - e} + e^t + e \dots \textcircled{3}$$

ここで、 $f(x) = e^x$ とおくと、微分の定義より

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{f(t) - f(1)}{t - 1} = f'(1) = e$$

よって、③の y について、 $\lim_{t \rightarrow 1} y = \frac{1}{e} + 2e \dots \textcircled{4}$

これを①の y に代入すると、 $e\left(\frac{1}{e} + 2e\right) = -x + 1 + e^2 \quad \therefore x = -e^2$

よって、 $t \rightarrow 1$ のときにQが近づく点 Q_1 とすると

$Q_1\left(-e^2, \frac{1}{e} + 2e\right)$ である。したがって、

$$\lim_{t \rightarrow 1} L(t) = A Q_1$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{(-e^2 - 1)^2 + \left(\frac{1}{e} + 2e - e\right)^2} = \sqrt{(e^2 + 1)^2 + \left(\frac{1}{e} + e\right)^2} \\ &= \sqrt{e^4 + 2e^2 + 1 + \frac{1}{e^2} + 2 + e^2} = \sqrt{e^4 + 3e^2 + 3 + \frac{1}{e^2}} = \sqrt{\frac{e^6 + 3e^4 + 3e^2 + 1}{e^2}} \\ &= \frac{\sqrt{e^6 + 3e^4 + 3e^2 + 1}}{e} = \frac{\sqrt{(e^2 + 1)^3}}{e} = \frac{(e^2 + 1)\sqrt{e^2 + 1}}{e} \end{aligned}$$

高等学校 数学 解答用紙 (4枚のうち3)

(解答及び解答に至る過程はすべて、解答用紙に記入すること。)

4

得点

(1)

P (cos θ , sin θ) とおき, $\triangle ABP$ の重心を G (X, Y) とおくと,

$$X = \frac{1 + 2 + \cos \theta}{3} = 1 + \frac{\cos \theta}{3}$$

$$Y = \frac{1 + \frac{1}{2} + \sin \theta}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sin \theta}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore PG^2 &= \left\{ \cos \theta - \left(1 + \frac{\cos \theta}{3} \right) \right\}^2 + \left\{ \sin \theta - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sin \theta}{3} \right) \right\}^2 \\ &= \left(\frac{2}{3} \cos \theta - 1 \right)^2 + \left(\frac{2}{3} \sin \theta - \frac{1}{2} \right)^2 \\ &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{4}{9} - \frac{4}{3} \cos \theta - \frac{2}{3} \sin \theta \\ &= \frac{61}{36} - \frac{2}{3} (2 \cos \theta + \sin \theta) \cdots (*) \end{aligned}$$

したがって, $2 \cos \theta + \sin \theta$ が最大のとき PG は最小となる。

三角関数の合成より

$$2 \cos \theta + \sin \theta = \sqrt{5} \cos(\theta - \alpha) \left(\text{ただし } \alpha \text{ は、} \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ を満たす鋭角} \right)$$

と, 変形できるから, (*) から PG は $\theta = \alpha$ のとき最小で, このとき $P \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$

高等学校 数学 解答用紙 (4枚のうち4)

(解答及び解答に至る過程はすべて、解答用紙に記入すること。)

4 (続き)

(2)

$$f\left(\frac{e^x-1}{k}\right) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{k} & \left(0 \leq \frac{e^x-1}{k} \leq 1 \text{ のとき} \right) \\ 0 & \left(\frac{e^x-1}{k} < 0, 1 < \frac{e^x-1}{k} \text{ のとき} \right) \end{cases} \quad \text{より,}$$

$0 \leq \frac{e^x-1}{k} \leq 1$ を解くと, $0 \leq x \leq \log(k+1)$ から,

$$f\left(\frac{e^x-1}{k}\right) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{k} & \left(0 \leq x \leq \log(k+1) \text{ のとき} \right) \\ 0 & \left(x < 0, \log(k+1) < x \text{ のとき} \right) \end{cases} \quad \text{となる。}$$

(i) $\log(k+1) < 2$ すなわち, $k \leq 6$ のとき、・・・ (※)

$$\begin{aligned} \int_0^2 f\left(\frac{e^x-1}{k}\right) dx &= \int_0^{\log(k+1)} \frac{e^x-1}{k} dx + \int_{\log(k+1)}^2 0 dx \\ &= \left[\frac{e^x-x}{k} \right]_0^{\log(k+1)} = \frac{k - \log(k+1)}{k} \end{aligned}$$

(※) $\log(k+1) < 2$ のとき, $k < e^2 - 1$

$2.7^2 < e^2 < 2.8^2$ より, $6.29 < e^2 - 1 < 6.84$ で, k は自然数だから

(ii) $\log(k+1) \geq 2$ すなわち, $k \geq 7$ のとき,

$$\begin{aligned} \int_0^2 f\left(\frac{e^x-1}{k}\right) dx &= \int_0^2 \frac{e^x-1}{k} dx \\ &= \left[\frac{e^x-x}{k} \right]_0^2 = \frac{e^2-3}{k} \end{aligned}$$

(i) (ii) より,

$$\int_0^2 f\left(\frac{e^x-1}{k}\right) dx = \begin{cases} \frac{k - \log(k+1)}{k} & (1 \leq k \leq 6 \text{ のとき}) \\ \frac{e^2-3}{k} & (k \geq 7 \text{ のとき}) \end{cases}$$